MINISTERUL EDUCAŢIEI

Constantin Năstăsescu
Constantin Niţă
Ion Chiţescu
Dan Mihalca

Matematică

Trunchi comun şi curriculum diferenţiat

Manual pentru clasa a IX - a

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ

CUPRINS

ALGEBRĂ

GEOMETRIE ŞI TRIGONOMETRIE

1 NUMERE REALE. ECUAŢII DE GRADUL AL DOILEA CU RĂDĂCINI REALE

§1. Numere raţionale. Reprezentarea numerelor raţionale sub formă de fracţii zecimale (periodice)

1.1. Noţiuni preliminarii

În clasele anterioare a apărut necesitatea extinderii mulţimilor de numere naturale, respectiv întregi.

Astfel, în gimnaziu s-a impus necesitatea extinderii mulţimilor numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, de exemplu pentru a putea rezolva ecuaţii de forma $m + x = n$, cu m şi n numere naturale, obţinându-se mulţimea $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, a numerelor întregi. Apoi s-a extins şi mulţimea numerelor întregi, de exemplu pentru a putea rezolva ecuaţii de forma $qx = p$, cu p şi q numere întregi, şi $q \neq 0$, obţinându-se mulţimea $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ a numerelor raţionale. S-au definit de asemenea, operaţii cu numere raţionale şi s-a introdus reprezentarea zecimală a numerelor raţionale, impusă în special de probleme de natură practică.

În practică se foloseşte, de obicei, reprezentarea (scrierea) numerelor raţionale sub formă de fracţii zecimale.

Aşa cum este cunoscut din aritmetică, cu ajutorul algoritmului de împărţire orice număr raţional nenegativ $\frac{m}{n}$ ($m \geqslant 0$, $n > 0$) se reprezintă sub forma unei fracţii zecimale finite sau infinite (adică, cu o infinitate de zecimale). Astfel în loc de $\frac{1}{4}$ se scrie 0,25; în loc de $\frac{5}{8}$ se scrie 0,625; în loc de $\frac{1}{3}$ se scrie 0,333… Deoarece avem de-a face atât cu fracţii zecimale finite, cât şi cu fracţii zecimale infinite, pentru uniformizare, se pot adăuga la dreapta fracţiei zecimale o infinitate de zerouri.

De exemplu: $\frac{1}{4} = 0{,}25000\ldots$; $\frac{5}{8} = 0{,}625000\ldots$.

Astfel putem spune că toate fracţiile zecimale sunt infinite.

Numerele întregi se reprezintă, evident, ca fracţii zecimale cu o infinitate de zerouri după virgulă.

De exemplu: $5 = 5{,}000\ldots$; $13 = 13{,}000\ldots$.

Aşadar, orice număr raţional nenegativ $\frac{m}{n}$ poate fi reprezentat sub forma unei fracţii zecimale infinite:

$$\frac{m}{n} = a_0,\, a_1a_2a_3\ldots\,.$$

Numărul a_0 este *partea întreagă* a lui $\frac{m}{n}$, iar numărul $0,\, a_1a_2a_3\ldots$ este *partea fracţionară* a sa. Numerele a_1, a_2, a_3,… sunt cuprinse între 0 şi 9, adică $0 \leqslant a_i \leqslant 9$, pentru $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Observăm acum că şi numerele raţionale negative au o astfel de reprezentare. Vom nota partea întreagă a unui număr negativ cu semnul minus deasupra. Astfel numărul $-\frac{5}{2} = -3 + \frac{1}{2}$ se poate scrie sub forma $\overline{3}, 5000\ldots$.

Analog, $-0{,}321 = \overline{1}{,}679000\ldots$;

$$-25\frac{2}{3} = -25{,}666\ldots = -26 + \frac{1}{3} = \overline{26}{,}333\ldots$$

În acest mod, orice număr raţional (negativ, pozitiv sau zero) se reprezintă sub forma unei fracţii infinite:

$$\frac{m}{n} = a_0,\, a_1a_2a_3\ldots \tag{1}$$

unde a_0 este partea întreagă a lui $\frac{m}{n}$, iar $0,\, a_1a_2a_3\ldots$ este partea fracţionară (zecimală) a sa (a_0 este un număr întreg, iar a_1, a_2, a_3, … sunt numere cuprinse între 0 şi 9).

Partea fracţionară $0,\, a_1a_2a_3\ldots$ din reprezentarea (1) a oricărui număr raţional este un număr pozitiv mai mic decât 1. Reprezentarea numerelor raţionale negative sub formă de fracţie zecimală infinită, cu partea întreagă număr negativ (iar partea fracţionară un număr pozitiv) o vom face cu sopul de a uniformiza în continuarea acestui capitol studiul numerelor reale (pozitive şi negative).

Observaţie. Scrierea numerelor negative sub forma indicată mai înainte se întâlneşte în practică la calculul cu logaritmi.

1.2. Fracţii zecimale periodice

Să vedem acum care sunt fracţiile zecimale prin care se reprezintă numerele raţionale. Mai întâi să definim fracţia zecimală periodică.

D e f i n i ţ i e. *O fracţie zecimală infinită $a_0, a_1a_2a_3\ldots$ se numeşte periodică, dacă există numerele naturale k şi p astfel încât $a_{n+p} = a_n$, pentru orice $n \geqslant k$.*

O fracţie zecimală periodică se notează, pe scurt, prin

$$a_0, a_1a_2\ldots a_{k-1}(a_ka_{k+1}\ldots a_{k+p-1}).$$

Mulţimea cifrelor scrise (în această ordine) în paranteză se numeşte *perioada fracţiei zecimale.* Dacă $k = 1$, adică perioada începe imediat după virgulă, avem de-a face cu o *fracţie zecimală periodică simplă*; în caz contrar avem de-a face cu o *fracţie zecimală periodică mixtă.*

În exemplele numerice de mai înainte fracţiile zecimale sunt periodice. Astfel, pentru 0,333 … avem $k = 1$, $p = 1$ şi $a_{n+1} = a_n = 3$ pentru orice $n \geqslant 1$. Scriem 0,333… = 0,(3), aceasta fiind o fracţie zecimală periodică simplă. Fracţiile zecimale finite, care după cum am observat pot fi considerate ca fracţii zecimale infinite (prin adăugare de zerouri) sunt periodice. De exemplu, pentru 0,25000… avem $k = 3$, $p = 1$ şi $a_{n+1} = a_n = 0$, pentru orice $n \geqslant 3$; iar pentru 0,625000… avem $k = 4$, $p = 1$, $a_{n+1} = a_n = 0$, pentru orice $n \geqslant 4$. Deci 0,25000… = 0,25(0), iar 0,625000… = 0,625(0). Aşadar acestea sunt fracţii zecimale periodice mixte. În sfârşit, fracţia $\overline{15},723434\ldots$ este periodică şi se scrie, pe scurt, $\overline{15},72(34)$.

Am observat că reprezentarea unui număr raţional sub formă de fracţie zecimală se obţine cu ajutorul algoritmului de împărţire. Să considerăm, de exemplu, numerele $\dfrac{5}{33}$ şi $\dfrac{19}{55}$. Avem:

Exemplul 1

$$\begin{array}{l|l}
5 & 33 \\ \hline
50 & 0{,}15\ldots \\
\underline{33} & \\
170 & \\
\underline{165} & \\
\quad 5 &
\end{array}$$

Exemplul 2

$$\begin{array}{l|l}
19 & 55 \\ \hline
190 & 0{,}345\ldots \\
\underline{165} & \\
250 & \\
\underline{220} & \\
\ 300 & \\
\ \underline{275} & \\
\quad 25 &
\end{array}$$

Fiecare număr de după virgulă se obţine printr-o împărţire parţială:

$$\begin{array}{l|l} 50 & 33 \\ \cline{2-2} \underline{33} & 1 \\ 17 & \end{array}
\quad
\begin{array}{l|l} 170 & 33 \\ \cline{2-2} \underline{165} & 5 \\ \quad 5 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l} 190 & 55 \\ \cline{2-2} \underline{165} & 3 \\ \ 25 & \end{array}
\quad
\begin{array}{l|l} 250 & 55 \\ \cline{2-2} \underline{220} & 4 \\ \ 30 & \end{array}
\quad
\begin{array}{l|l} 300 & 55 \\ \cline{2-2} \underline{275} & 5 \\ \ 25 & \end{array}$$

Exemplul 1 *Exemplul 2*

Fiecare deîmpărţit parţial se deduce din restul precedent prin adăugarea unui zero la dreapta sa, adică mărindu-l de zece ori. Ori resturile parţiale sunt toate mai mici decât împărţitorul. După un număr finit de operaţii parţiale se regăseşte deci, ori deîmpărţitul iniţial (exemplul 1), ori un rest deja întâlnit (exemplul 2). De la acest pas putem să nu mai continuăm împărţirea, deoarece în câtul împărţirii lui 5 la 33, respectiv în câtul împărţirii lui 19 la 55, cifrele se vor repeta. De aceea,

$$\frac{5}{33} = 0,(15); \ \frac{19}{55} = 0,3(45).$$

În general, avem:

Teorema 1. Orice număr raţional se reprezintă sub formă de fracţie zecimală periodică, care nu are perioada (9).

Demonstraţie. Dacă a este un număr raţional oarecare, atunci $a = a_0 + a'$, unde a_0 este un număr întreg (partea întreagă a lui a), iar a' este un număr raţional nenegativ mai mic decât 1. Dacă a' se reprezintă sub formă de fracţie zecimală periodică, care nu are perioada (9), atunci a se reprezintă sub formă de fracţie zecimală periodică care nu are perioada (9), în care partea întreagă este a_0, iar partea fracţionară îl reprezintă pe a'. Aşadar, pentru demonstraţia teoremei este suficient să considerăm numai numere raţionale $\frac{m}{n}$, astfel încât $0 \leqslant \frac{m}{n} < 1$. Fie deci $\frac{m}{n}$ $(m \geqslant 0,\ n > 0)$ un astfel de număr raţional. Prin algoritmul de împărţire a lui m la n sunt posibile resturile: $0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Deoarece resturile iau cel mult n valori, rezultă că după cel mult n paşi ai algoritmului, se repetă unul din ele. Deci va rezulta o fracţie zecimală periodică.

Se arată că nu este posibil ca fracţia zecimală periodică asociată unui număr raţional să aibă perioada (9). Să presupunem, prin absurd, că fracţia ar avea perioada (9). Atunci, prin algoritmul de împărţire, ajungem la un moment dat la un rest r astfel încât înmulţindu-l cu 10, şi împărţindu-l la n, să se obţină un cât egal cu 9 şi restul să fie, de asemenea, r. Deci după teorema împărţirii cu rest, avem: $10r = n \cdot 9 + r$, cu $r < n$.

De aici se obţine $9r = 9n$, de unde $r = n$ ceea ce este în contradicţie cu ipoteza $r < n$.

Observaţie. Fracţiile zecimale finite (adică de perioadă (0) se obţin atunci când prin algoritmul de împărţire se obţine la un moment dat un rest egal cu zero. După aceasta toate resturile vor fi egale cu zero.

Împărţirile parţiale din exemplele precedente se scriu astfel:

Exemplul 1 $50 = 33 \cdot 1 + 17$; $170 = 33 \cdot 5 + 5$.

Înmulţind cu 10 prima relaţie, şi folosind pe a doua avem $500 = (33 \cdot 1 + 17) \cdot 10 = 33 \cdot 10 + 170 = 33 \cdot 10 + (33 \cdot 5 + 5) = 33 \cdot 15 + 5$.

Deci $100 \cdot 5 = 33 \cdot 15 + 5$, adică 15 este câtul împărţirii lui $100 \cdot 5$ la 33.

Exemplul 2 $190 = 55 \cdot 3 + 25$; $250 = 55 \cdot 4 + 30$; $300 = 55 \cdot 5 + 25$.

Împărţind cu 100 prima relaţie şi folosind pe următoarele două avem $19\,000 = (55 \cdot 3 + 25) \cdot 100 = 55 \cdot 300 + 250 \cdot 10 = 55 \cdot 300 + (55 \cdot 4 + 30) \cdot 10 = 55 \cdot 300 + 55 \cdot 40 + 300 = 55 \cdot 340 + 55 \cdot 5 + 25 = 55 \cdot 345 + 25$.

Deci $1\,000 \cdot 19 = 55 \cdot 345 + 25$ şi $10 \cdot 19 = 55 \cdot 3 + 25$, adică 345 este câtul împărţirii lui $1\,000 \cdot 19$ la 55, iar 3 este câtul împărţirii lui $10 \cdot 19$ la 55.

În continuare vom arăta că reciproca teoremei precedente este, de asemenea, adevărată.

Să dăm mai întâi două exemple:

1) Fie $0,(43)$ o fracţie zecimală periodică simplă. Dacă există un număr raţional $\frac{m}{n}$, astfel încât fracţia dată să se obţină din acesta prin algoritmul de împărţire, atunci 43 este câtul întreg al împărţirii lui $100m$ la n; mai mult, din motive de periodicitate, restul acestei împărţiri este egal cu m. Deci

$$100m = n \cdot 43 + m$$

de unde

$$9\,m = n \cdot 43.$$

Numărul raţional căutat este $\frac{m}{n} = \frac{43}{99}$.

Verificare. Este suficient să aplicăm algoritmul de împărţire pentru a vedea că numărul raţional $\frac{43}{99}$ se reprezintă sub forma fracţiei zecimale $0,(43)$.

2) Fie $0,\,41(23)$ o fracţie zecimală periodică mixtă. Dacă există un număr raţional $\frac{m}{n}$, astfel încât fracţia dată să se obţină din acesta prin algoritmul de împărţire, atunci:

4 123 este câtul întreg al împărţirii lui $10000m$ la n, iar 41 este câtul întreg al împărţirii lui $100m$ la n.

Mai mult, din motive de periodicitate, cele două resturi obţinute sunt egale. Deci:

$$10000m = n \cdot 4\,123 + r$$
$$100m = n \cdot 41 + r$$

şi prin scădere se obţine:

$$9\,900m = n \cdot (4\,123 - 41).$$

Numărul raţional căutat este:

$$\frac{m}{n} = \frac{4082}{9900} = \frac{4123 - 41}{9900}.$$

Verificare. Este suficient să aplicăm algoritmul de împărţire pentru a vedea că numărul raţional $\frac{4082}{9900}$ se reprezintă sub forma fracţiei zecimale $0,\,41(23)$.

În general avem:

Teorema 2. **Orice fracţie zecimală periodică, care are perioada diferită de (9), reprezintă un anumit număr raţional, din care se obţine prin algoritmul de împărţire.**

Fie $a_0,\, a_1a_2\, \ldots\, a_{k-1}(a_ka_{k+1} \ldots a_{k+p-1})$ (1)

o fracţie zecimală periodică, care nu are perioadă (9). Trebuie să arătăm că există un număr raţional, astfel încât fracţia dată (1) să se obţină din acesta prin algoritmul de împărţire. Nu vom da o demonstraţie a acestei teoreme. Observăm însă că cele două exemple de mai înainte ne sugerează reguli de găsire, în general, a numărului rațional căutat. Astfel:

1° Dacă $k = 1$, adică fracția este periodică simplă, avem:

$$a_0,\left(a_1a_2...a_p\right) = a_0 + \frac{a_1a_2...a_p}{\underbrace{99...9}_{p \text{ ori}}}$$

(în partea din dreapta a egalității de mai sus $a_1a_2...a_p$ reprezintă numărul natural având cifrele $a_1, a_2, \ldots a_p$).

2° Dacă $k > 1$, adică fracția este periodică mixtă, avem:

$$a_0, a_1\, a_2 \ldots a_{k-1}(a_ka_{k+1}\ldots a_{k+p-1}) =$$

$$= a_0 + \frac{a_1a_2...a_{k-1}a_ka_{k+1}...a_{k+p-1} - a_1a_2...a_{k-1}}{\underbrace{99...9}_{p \text{ ori}}\underbrace{00...0}_{(k-1) \text{ ori}}}$$

Formule 1° și 2° dau reguli după care se găsește numărul rațional care se reprezintă sub forma unei fracții zecimale periodice date.

Exemple 1) $0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; $0,(45) = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$;

2) $0{,}45(3) = \frac{453-45}{900} = \frac{408}{900} = \frac{34}{75}$;

3) $0{,}027(45) = \frac{2745-27}{99000} = \frac{2718}{99000} = \frac{151}{5500}$.

Observație. Am definit fracțiile zecimale periodice fără a face presupunerea că au sau nu perioada (9). Dacă considerăm o fracție zecimală cu perioada (9), aplicând în mod formal regulile 1° și 2° de mai sus, se obține un număr rațional. Fie, de exemplu, fracția zecimală periodică 0, (9). După regula 1°, acestei fracții zecimale îi corespunde numărul rațional:

$$0,(9) = \frac{9}{9} = 1.$$

Pe de altă parte, numărului 1 îi corespunde prin algoritmul împărțirii fracția zecimală 1, 000 ... = 1, (0).

Se considerăm un alt exemplu și anume fracția zecimală periodică 0, 4(9) cu perioada (9). După regula 2° acestei fracții îi corespunde numărul rațional

$$0{,}4(9) = \frac{49-4}{90} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}.$$

Pe de altă parte numărului rațional $\frac{1}{2}$ îi corespunde prin algoritmul împărțirii fracția zecimală 0, 5000 ... = 0,5(0).

Din cele două exemple rezultă că teorema precedentă (în ultima sa parte) nu mai este adevărată pentru fracțiile zecimale infinite cu perioada (9). Mai precis, dacă este dată o fracție zecimală infinită cu perioada (9), acesteia îi corespunde după regula 1° sau regula 2° un număr rațional $\frac{m}{n}$. Însă acestui număr rațional $\frac{m}{n}$, prin algortimul împărțirii, nu-i mai corespunde fracția zecimală dată, ci o fracție care se obține din aceasta prin mărirea cu o unitate a numărului din fața primei perioade și înlăturarea cifrelor următoare. Se poate vedea ușor că această regulă se referă la toate fracțiile zecimale periodice cu perioada (9).

De aceea, ori de câte ori întâlnim în calcule o fracție zecimală cu perioada (9) convenim să o înlocuim cu fracția zecimală cu perioada (0) (finită) obținută după regula enunțată mai înainte. De exemplu:

$$0,4(9) = 0,5(0);\ 0,1(9) = 0,2(0).$$

În concluzie numerele raționale (și numai ele) se reprezintă sub formă de fracției zecimale infinite periodice. Dar există fracții zecimale care nu sunt periodice? Răspunsul la această întrebare este afirmativ. De exemplu, fracția:

$$0,101001000100001000001\ldots$$

(după primul 1 este 0, după al doilea sunt doi de 0 etc.) este o fracție zecimală infinită neperiodică.

Într-adevăr, se presupunem că această fracție este periodică, și fie p numărul cifrelor din perioadă. Perioada trebuie să conțină și o unitate. De aceea, între orice două unități consecutive (de după virgulă) nu pot fi mai mult de $p-1$ zerouri; contradicție. Contradicția obținută arată că fracția este neperiodică.

În paragraful următor se vor indica probleme concrete care conduc la fracții zecimale infinite neperiodice.

§2. Numere reale ca fracții zecimale infinite. Ordonarea numerelor reale

2.1. Necesitatea extinderii mulțimii $\mathbb{Q}$

În clasele anterioare a fost prezentată necesitatea lărgirii mulțimii $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale, introducându-se astfel mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale.

Iată două probleme concrete care conduc la aceasta.

1) Nu există nici un număr rațional al cărui pătrat să fie 2.

Într-adevăr, să presupunem, prin absurd, că există un număr rațional $\frac{m}{n}$, astfel încât $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Putem presupune că fracția $\frac{m}{n}$ este ireductibilă, adică m și n sunt numere întregi prime între ele. Din $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ rezultă $m^2 = 2n^2$. Cum $2n^2$ este număr par, atunci m^2 este par și deci m este par. Fie $m = 2k$, k un număr întreg. Înlocuind pe $m = 2k$ în relația precedentă, rezultă $4k^2 = 2n^2$, de unde

$2k^2 = n^2$, adică n este par. Deci m şi n sunt numere întregi pare, ceea ce contrazice ireductibiltatea fracţiei $\frac{m}{n}$. Prin urmare, presupunerea noastră că $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ este falsă. Acest fapt arată că ecuaţia cu coeficienţi întregi $x^2 - 2 = 0$ nu are ca soluţii, numere raţionale.

2) Fie acum un triunghi dreptunghic isoscel ABC (fig. I.1).

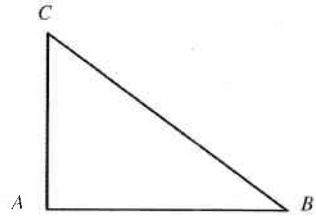

Fig. I. 1

Alegând cateta AB ca unitate de măsură (adică de lungime 1), vom arăta că nu există un număr raţional $\frac{m}{n}$ care să reprezinte lungimea lui BC, adică a $n - a$ parte din AB să se cuprindă de m ori în BC. Într-adevăr, dacă lungimea lui BC s-ar exprima prin numărul raţional $\frac{m}{n}$, atunci conform teoremei lui Pitagora rezultă $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Dar am arătat la pct. 1 că o astfel de relaţie nu poate avea loc.

Dacă $BC = a$, rezultă că a este o rădăcină a ecuaţiei $x^2 - 2 = 0$. Notăm $a = \sqrt{2}$, care reprezintă lungimea ipotenuzei. Am văzut că $\sqrt{2}$ nu este un număr raţional, deci el va fi un număr de o natură nouă. Un astfel de număr, care nu este raţional îl numim *iraţional*. În acelaşi mod numerele $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ ş.a. care sunt rădăcini ale ecuaţiilor: $x^2 - 3 = 0$, $x^2 - 5 = 0$ ş.a. sunt numere iraţionale. Există şi numere iraţionale care nu sunt rădăcini ale unor ecuaţii, de exemplu numărul π care este egal cu raportul dintre lungimea unui cerc şi diametrul său. Mulţimea numerelor raţionale împreună cu mulţimea numerelor iraţionale formează mulţimea $\mathbb{R}$ *a numerelor reale.*

În clasele anterioare, a fost indicat un algoritm de construcţie a fracţiei zecimale sub care se reprezintă $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1,41421356\ldots .$$

Deoarece $\sqrt{2}$ este număr iraţional rezultă că fracţia zecimală care îl reprezintă este o fracţie zecimală infinită neperiodică. Şi numărul π are o reprezentare ca fracţie zecimală infinită neperiodică.

Acceptăm că fiecare fracţie zecimală neperiodică infinită reprezintă un număr real, mai precis un număr iraţional.

În acest mod orice număr real a se reprezintă printr-o fracţie zecimală infinită (periodică sau neperiodică) $a_0, a_1a_2a_3\ldots$.

Funcţia:

$$a \longrightarrow a_0, a_1a_2a_3\ldots$$

de la mulţimea numerelor reale la mulţimea fracţiilor zecimale infinite, care nu au perioada (9), asociază fiecărui număr real o fracţie zecimală, care nu are perioada (9), bine determinată, şi fiecare astfel de fracţie zecimală reprezintă un număr real bine determinat.

Teoria riguroasă a numerelor reale ca fracţii zecimale infinite depăşeşte programa clasei a IX-a. Introducerea fracţiilor zecimale infinite ne permite să pătrundem mai mult în natura acestor noi numere (iraţionale).

Observaţie. Pentru simplitate, pe baza funcţiei precedente, vom identifica în continuare numărul real cu fracţia zecimală prin care se reprezintă, adică:

$$a = a_0, a_1a_2a_3\ldots .$$

În particular, numerele raţionale se identifică cu fracţiile zecimale periodice (de perioadă diferită de (9)) prin care se reprezintă.

2.2. Ordonarea numerelor reale

Vom defini ordinea pe mulţimea numerelor reale, folosind reprezentarea lor zecimală, astfel încât aceasta să coincidă pentru numerele raţionale cu cea deja introdusă pentru aceste numere în clasele anterioare.

Fie $a = a_0, a_1a_2a_3\ldots$ şi $b = b_0, b_1b_2b_3\ldots$ două numere reale, unde fracţiile $a_0, a_1a_2a_3\ldots$ şi $b_0, b_1b_2b_3\ldots$ nu au perioada (9).

Spunem că cele două numere sunt *egale* dacă oricare ar fi $i = 0, 1, 2\ldots$ avem $a_i = b_i$.

Definiţie. *Spunem că numărul real $a = a_0, a_1a_2a_3\ldots$ este mai mic decât numărul real $b = b_0, b_1b_2b_3\ldots$ şi scriem:*

$$a < b$$

dacă există un număr natural $k \geqslant 0$, astfel încât $a_k < b_k$ şi $a_i = b_i$ pentru orice $i < k$.

În acest caz se mai spune că *b este mai mare* decât a şi se scrie $b > a$.

Exemple 1) $3{,}9014\ldots < 4{,}1735\ldots$, deoarece $a_0 = 3 < 4 = b_0$.

2) $3{,}45170\ldots < 3{,}45181\ldots$, deoarece $a_0 = b_0 = 3$, $a_1 = b_1 = 4$, $a_2 = b_2 = 5$, $a_3 = b_3 = 1$, $a_4 < b_4$ $(7 < 8)$.

3) $\overline{20}{,}432\ldots < 1{,}730\ldots$, deoarece $a_0 = -20 < 1 = b_0$.

4) $3{,}173\ldots > 3{,}165\ldots$, deoarece $a_0 = b_0 = 3$, $a_1 = b_1 = 1$ şi $a_2 > b_2$ $(7 > 6)$.

5) $\overline{4}{,}232\ldots > \overline{4}{,}193\ldots$, deoarece $a_0 = b_0 = -4$, $a_1 > b_1$ $(2 > 1)$.

Dacă $a < 0$ se spune că numărul real a este *negativ* iar dacă $a > 0$ atunci a se numeşte *pozitiv*. Este clar că un număr real $a = a_0, a_1a_2a_3\ldots$ este negativ dacă şi numai dacă partea sa întreagă a_0 este număr negativ.

De exemplu, $\overline{1}{,}372\ldots > 0{,}000\ldots = 0$, deoarece $a_0 = -1 < 0$.

Observaţie. Pentru numerele raţionale, definiţia inegalităţilor dată mai înainte este tocmai cea pe care o cunoaştem din clasele anterioare. Astfel:

$0{,}5000\ldots < 0{,}51000\ldots$ dacă şi numai dacă $\dfrac{1}{2} < \dfrac{51}{100}$;

$0{,}(3)\ldots < 0{,}3(34)\ldots$ dacă şi numai dacă $\dfrac{1}{3} < \dfrac{331}{990}$.